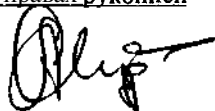


0-735638

На правах рукописи



Кирпичников **Александр** Петрович

Структура квазистационарного электромагнитного
поля высокочастотного индукционного разряда
конечной длины и обратная задача
электродинамики

05.13.18 - Теоретические основы математического моделирования,
численные методы и комплексы программ
01.04.02 - Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Казань - 2003

Работа выполнена в Казанском государственном технологическом
университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор Александр Михайлович Елизаров;

доктор физико-математических наук
профессор Николай Васильевич Змитренко;

доктор физико-математических наук
профессор Борис Ахунович Тимеркаев

Ведущая организация - Институт космических исследований РАН

Защита состоится «18» апреля 2003 г. в 14 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.079.01 в Казанском государственном
техническом университете им. А.Н. Туполева по адресу: 420111, г. Казань,
ул. К. Маркса, д.10 (актовый зал)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке КГТУ
им. А.Н. Туполева

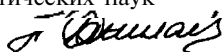
Автореферат разослан 17 марта 2003 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

доктор физико-математических наук

профессор



п.г. Данилаев

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В физике газоразрядной плазмы хорошо известен и изучен метод определения электропроводности плазмы a из экспериментов с каскадной дугой с помощью интегрального закона Ома в виде

$$I = 2\pi E \int_0^R \sigma dr,$$

где I - ток дуги, E - напряжённость электрического поля в столбе, L - радиус стабилизирующего дугу канала. При этом использование интегрального, а не дифференциального закона Ома связано, очевидно, со сложностями экспериментального определения пространственного определения плотности тока и напряжённости электрического поля в одних и тех же точках разряда.

Между тем, для высокочастотных индукционных (ВЧИ) разрядов аналогичная задача может **быть** поставлена в рамках гораздо более четкой и строгой, а с точки зрения физики - и более красивой постановки, суть которой заключается в следующем. В системе уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле ВЧИ **разряда**, число величин, характеризующих поле, вообще говоря, на единицу больше числа самих уравнений, поскольку к таким величинам относятся как напряжённости электрического и магнитного полей, так и проводимость в разряде. Или, говоря другими словами, система уравнений Максвелла незамкнута. Ясно поэтому, что, **считая** заданной одну из величин, характеризующих поле, можно получить на выходе системы набор различных комбинаций, состоящих из электромагнитных величин и проводимости в разряде. Обычно задаётся именно проводимость (по-видимому,

наиболее известным и популярным примером такой постановки задачи является известная модель Дж. Дж. Томсона ВЧ индукционного разряда) Можно, однако, ставить задачу и **по-другому** - задать одну из компонент электромагнитного поля и попытаться найти все остальные компоненты и проводимость **плазмообразующего** газа.

При этом следует, однако, учитывать то обстоятельство, что для решения системы дифференциальных уравнений (какой является система уравнений Максвелла) необходимым является ещё и знание граничных условий для всех электромагнитных величин, составляющих поле, и поэтому - с точки зрения чисто практической - наиболее удобным является выбор в качестве входной величины амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде, поскольку для всех остальных электромагнитных величин (нужно подчеркнуть, что именно для всех) эти граничные условия с точки зрения физики заранее очевидны и, таким образом, не нуждаются в дополнительном экспериментальном определении (речь идёт о граничных условиях на оси плазменного сгустка).

Тем самым, используя взятое из эксперимента двумерное числовое поле амплитуды $H_z(r, z)$, можно попытаться путём совместного аналитического и численного решения системы **максвелловских** уравнений решить задачу восстановления полной пространственной структуры квазистационарного электромагнитного поля и проводимости $\sigma(r, r)$ в разряде. Этой задаче, которую можно назвать обратной задачей электродинамики для ВЧИ разряда, в основном и посвящена настоящая работа.

Основная **проблема**, с которой при этом приходится сталкиваться, состоит в невозможности аппроксимации экспериментально измеренного поля $H_z(r, z)$ любыми из стандартных методов обработки экспериментальных данных (использование которых приводит к расходимости $a(r, z)$ вблизи оси плазмоида), в связи с чем основной задачей становится выяснение истинной картины поведения всех **главных** характеристик квазистационарного

электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда при достаточно малых значениях радиальных координат r . Говоря другими словами, нужно проанализировать систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в разряде и попытаться получить если не точное, то хотя бы их приближённое решение вблизи оси $r=0$. Именно отсутствие информации о поведении характеристик поля внутри гагазмоида тормозило до сих пор широкое использование такого рода метода диагностики ВЧ низкотемпературной плазмы на практике (хотя его идея была предложена более тридцати лет назад), в связи с чем выбранная тема диссертации представляется актуальной.

Основная цель работы. Настоящая работа посвящена разработке замкнутой двухмерной **математической модели** расчёта электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик плазмы высокочастотного индукционного разряда конечной длины по множеству меры нуль экспериментально измеренных значений амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде.

Научная новизна работы. Среди новых результатов, полученных автором в диссертации, наиболее значительными представляются следующие:

- введено понятие предельных соотношений систем дифференциальных уравнений с частными производными;
- выведены формулы предельных соотношений системы уравнений электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда конечной длины;
- дано решение задачи о структуре квазистационарного электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда конечной длины вблизи оси плазменного сгустка;

- построена модель **Томсона** высокочастотного индукционного разряда конечной длины и выведено уравнение для характеристик электромагнитного поля в плоскости центрального сечения плазмоида;
- построена численная модель расчёта электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик электромагнитного поля ВЧИ разряда конечной длины;
- показано, что внутри ВЧИ разряда существует коаксиальная цилиндрическая структура, соответствующая максимумам величин $a E^j$, где j - натуральный ряд чисел;
- установлено, что в высокочастотном индукционном разряде области прямого и возвратного течений разделены поверхностью, во всех точках которой значения температуры **плазмообразующего** газа при каждом фиксированном значении радиальной координаты в разряде максимальны.

Научно-практическое значение **работы** заключается в следующем:

- создан метод приближенного решения систем дифференциальных уравнений с частными производными, **позволяющий** однозначно описать структуру решений этих уравнений в окрестностях точек, в которых выражения для вторичных характеристик описываемого уравнениями процесса (то есть тех или иных комбинаций входящих в исходные уравнения неизвестных величин) содержат неопределённости типа $0/0$;
- разработан метод диагностики низкотемпературной плазмы высокочастотного индукционного разряда, позволяющий вычислить все основные характеристики разряда по измеренным значениям амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде;

- проанализирована структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда конечной длины во всём объёме плазменного сгустка.

Результаты, полученные в настоящей работе, могут **быть** полезны специалистам в области математического моделирования, теоретической и математической физики, физики и техники высокочастотного индукционного разряда, а также специалистам по разработке и оптимизации различного рода энергетических установок, основанных на принципе индукционного нагрева проводящих сред.

Апробация работы. Основные материалы диссертации докладывались, в частности, на Всесоюзной **школе-семинаре** "Актуальные проблемы теплофизики и физической гидрогазодинамики" (Киев, 1989); Всесоюзной конференции по современным проблемам электрометаллургии стали (Челябинск, 1990); Всесоюзной научно-технической конференции "Применение токов высокой частоты в электротехнологии" (Ленинград, 1991); Всероссийских межвузовских **научно-технических** семинарах и конференциях "Внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика" (Казань, 1992 - 2002); Международной **теплофизической** школе (Тамбов, 1995); Международном симпозиуме по теоретической и прикладной **плазмохимии** (Иваново, 1995); Международной конференции "Динамика систем, механизмов и **машин**" (Омск, 1995); Международной научно-технической конференции "Молодая наука - новому тысячелетию" (Набережные Челны, 1996); Российской научно-технической конференции "Новые материалы и технологии" (Москва, 1997); Международной научно-технической конференции "Технические вузы - республике" (Минск, 1997); Международных научных конференциях "Математические методы в технике и технологиях" (Новомосковск, 1997; Владимир, 1998, Великий Новгород, 1999; Санкт-Петербург, 2000; Смоленск, 2001; Тамбов, 2002); Конференции по

физике низкотемпературной плазмы ФНТП-98 (Петрозаводск, 1998);
 Международной конференции "Плёнки и покрытия " (Санкт-Петербург, 1998);
 Российских национальных конференциях по теплообмену (Москва, 1998; 2002);
 Всероссийской конференции молодых учёных "Математическое
 моделирование в естественных науках" (Пермь, 1998); Сибирском конгрессе по
 прикладной и индустриальной математике ИНПРИМ-98, посвящённом памяти
 С.Л. Соболева (1908-1989) (Новониколаевск, 1998); Воронежской школе
 "Современные проблемы механики и прикладной математики" (1998);
 Международных конференциях по неравновесным процессам в соплах и
 струях. (Санкт-Петербург, 1998; 2000); Школе по **плазмохимии** для молодых
 ученых России и стран СНГ (Иваново, 1999); Всероссийском
 электротехническом конгрессе с международным участием "На рубеже веков:
 итоги и перспективы" ВЭЛК-99 (Москва, 1999); Международных
 конференциях "Проблемы промышленной теплотехники" (Киев, 1999; 2001);
 Международном симпозиуме "Heat and Mass Transfer under Plasma Conditions"
 (Анталья, 1999); Международной научно-технической конференции "Проблемы
 и прикладные вопросы физики" (Саранск, 1999); Международной научно-
 технической конференции "Плазмотехнология-99" (Запорожье, 1999);
 Всероссийской научной конференции "Тепло- и **массообмен** в химической
 технологии", посвящённой 80-летию со дня рождения профессора А.Г.
 Усманова (Казань, 2000); Минском международном форуме по
 тепломассообмену ММФ-2000; Весенних конференциях Европейского
 общества исследования материалов (European Materials Research
 Society) (Страсбург, 2000; 2002); Всероссийских конференциях по физике
 газового разряда (Рязань, 2000; 2002); Российском национальном симпозиуме
 по энергетике РНСЭ (Казань, 2001); Всероссийской научной конференции
 "Молекулярная физика неравновесных систем" (Иваново, 2001); **Вавиловских**
 чтениях "Мировое сообщество и Россия на путях модернизации" (Йошкар-Ола.
 2001); Международном симпозиуме по теоретической и прикладной

плазмохимии и Школе по плазмохимии для молодых учёных России и стран СНГ (Плёт, 2002), Звенигородской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (2003), на научных семинарах КГТУ(КХТИ), КГТУ им. А. Н. Туполева, ИММ им. Н. Г. Чеботарёва, ИКИ РАН, ИОФ РАН, ННЦХФТИ НАН Украины.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, включающего перечень результатов, выносимых на защиту, списка публикаций автора из 37 наименований, списка использованной литературы из 87 наименований и двух приложений. Диссертация напечатана в 1,5 межстрочных интервала, полный объём 270с., включая 24 рисунка и 29 таблиц.

Содержание работы

Во введении дается общая постановка задачи, отмечается её актуальность, формулируется основное направление исследований, кратко излагается содержание глав и приложений.

В первой главе введено центральное для всей работы понятие предельных соотношений системы дифференциальных уравнений, описывающих квазистационарное электромагнитное поле высокочастотного индукционного разряда и получены явные выражения предельных соотношений для случая одномерного ВЧИ разряда.

Параграф 1 посвящён выводу уравнений электромагнитного поля внутри высокочастотного индукционного разряда в одномерной постановке задачи (этот случай можно также назвать случаем идеального индуктора). Показано, что в условиях квазистационарности электромагнитного поля линейные относительно мгновенных значений входящих в них электрических и

магнитных величин **максвелловские** уравнения переходят в систему **нелинейных**, вообще говоря, уравнений для амплитудных и фазовых значений **напряжённостей** электрического и магнитного полей в разряде; число же самих уравнений при **этом, очевидно**, удваивается (заметим, что преобразования исходных величин, использованные в этой части работы для вывода уравнений электромагнитного поля, специалисты по низкотемпературной плазме иногда называют преобразованиями Соболева).

В параграфе 2 вводится центральное для всей работы понятие предельных соотношений для ВЧ индукционного разряда (или, точнее говоря, предельных соотношений системы дифференциальных уравнений, описывающих квазистационарное электромагнитное поле высокочастотного индукционного разряда). При этом предельными соотношениями названы здесь те соотношения, которые должны быть наложены на входящие в уравнения неизвестные величины с тем, чтобы имеющие ясный физический смысл вторичные характеристики **описываемого** этими уравнениями процесса (то есть те или иные комбинации входящих в эти уравнения неизвестных величин) не испытывали разрывов в тех точках, в которых эти вторичные характеристики содержат неопределённости типа 0/0 (в роли вторичных характеристик могут выступать, конечно, и простые константы). В данном случае такой вторичной характеристикой является проводимость в разряде $\sigma(r, z)$ – эта ключевая величина, которая связывает собою все основные первичные характеристики процесса.

Формула для проводимости, вытекающая из уравнений, полученных в параграфе 1, как показано, содержит неопределённость третьего порядка, которая раскрывается по правилу **Лопиталя**, и соотношения, которые накладываются при этом на характеристики электромагнитного поля, необходимо принимать во внимание при решении задач восстановления этих характеристик как функций радиальной координаты r по множеству меры нуль их экспериментально измеренных значений.

Параграф 3 посвящён математически вполне корректному выводу формул предельных соотношений высокочастотного индукционного разряда. Дело заключается в том, что вывод этих формул, осуществлённый в параграфе 2, обладая всеми преимуществами физической наглядности, не является, однако, с точки зрения математики вполне **корректным**, поскольку относится к тем - весьма редким и почти исключительным случаям - когда правило **Лопиталья** формально бессильно, и применение его поэтому носит пока чисто формальный характер (этот случай, в **частности**, был особо отмечен в известном учебнике по дифференциальному исчислению академика Н. Н. Лузина).

В данном параграфе осуществлён еще один - но уже без троекратного применения правила Лопиталья к исходному соотношению для $\sigma(r, z)$ - вывод формул предельных соотношений для ВЧ индукционного разряда. Этот вывод осуществлён двумя путями - как прямым дифференцированием исходных **максвелловских** уравнений электромагнитного **поля**, так и с помощью приёма, упрощающего в этом выводе ряд промежуточных расчётов.

Во второй главе на основе идеи предельных соотношений в виде системы формул выявлена структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного сгустка (в одномерном приближении).

В параграфе 1 показано, что предельные соотношения системы уравнений Максвелла, описывающих квазистационарное электромагнитное поле ВЧ индукционного разряда, в одномерном приближении сводятся просто к радиальным производным первичных характеристик поля - то есть амплитудных и фазовых значений электрического и магнитного полей в разряде. Вследствие этого **обстоятельства**, используя стандартные разложения в ряд Тейлора вблизи нуля (в данном случае - вблизи оси плазменного сгустка) и, оставляя **в** этих разложениях только первые их ненулевые слагаемые, мы

можем сразу получить набор аналитических **формул**, которые представляют собой приближённое решение задачи о структуре квазистационарного электромагнитного поля одномерного ВЧ индукционного **разряда** вблизи оси плазменного сгустка.

Параграф 2 посвящён выводу формул второго приближения для характеристик электромагнитного поля в **разряде**. При этом исходные уравнения для компонент ВЧ поля записаны здесь в упрощенном для области малых значений радиальных координат (зона вблизи оси плазмоида) виде, в который затем подставляются формулы первого приближения для амплитуд и фаз ВЧ поля. В результате получены **формулы**, содержащие поправки высших степеней малости по g по сравнению с полученными в параграфе 1 формулами первого приближения данной задачи. Удобство введения в рассмотрение второго приближения (в рамках данной задачи) выясняется ниже с помощью соответствующих результатов двухмерной модели, которые получены в главе 4. Заметим, что с точки зрения математики применяемая в этом разделе процедура нахождения приближённого решения системы уравнений для электромагнитного поля ВЧИ разряда есть, конечно, не что иное, как метод последовательных приближений **Линделефа-Пикара**, хорошо известный в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьей **главе** осуществлён вывод формул предельных соотношений системы **максвелловских** уравнений, записанных в существенно двухмерной постановке задачи, то есть - с точки зрения физики - для наиболее интересного на практике случая плазмоида конечной длины (этот случай можно также назвать случаем реального индуктора).

Параграф 1 посвящён выводу дифференциальных уравнений, которые описывают квазистационарное цилиндрически симметричное электромагнитное поле ВЧ индукционного разряда конечной длины в нагруженном плазмой индукторе. Как и в параграфе 1 главы 1 решение - в

соответствии с выбранной нами физической моделью - ищется в гармоническом виде и при этом система, состоящая из четырех уравнений Максвелла для мгновенных значений компонент ВЧ поля переходит в систему восьми дифференциальных уравнений с частными производными для шести неизвестных величин - амплитуды и фазы продольной компоненты магнитного поля в разряде, амплитуды и фазы радиальной компоненты магнитного поля, а также амплитудных и фазовых значений вихревого электрического поля внутри плазмоида. Структура полученной системы уравнений такова, что первые четыре в ней - это дифференциальные уравнения соответственно для четырёх магнитных характеристик ВЧ поля, оставшиеся же четыре содержат всего две неизвестные величины - амплитуду и фазу азимутального электрического поля внутри плазменного сгустка. Эти четыре уравнения не являются, однако, независимыми — показано, что они попарно эквивалентны друг другу и, тем самым, полученная система уравнений не является переопределённой. Это, в свою очередь, позволяет записать систему дифференциальных уравнений электромагнитного поля в двух эквивалентных (и, очевидно, обращаемых друг в друга, то есть взаимно обратных) формулировках - разрешёнными как относительно радиальных, так и продольных производных компонент ВЧ поля, так что при этом каждая из двух формулировок включает в себя шесть уравнений для шести (трёх амплитудных и трёх фазовых) характеристик электромагнитного поля в разряде.

В параграфе 2 проанализирована структура двумерных уравнений электромагнитного поля вблизи оси плазменного сгустка и дан вывод предельных соотношений этих уравнений, обобщающих на случай реального индуктора их одномерные аналоги, введённые в рассмотрение в главе 1. Весьма громоздкий вывод приводит, тем не менее, к достаточно компактному набору формул, переходящих в одномерном пределе в набор соответствующих им предельных соотношений, полученных ранее в главе 1. Система граничных условий при этом, очевидно, должна быть дополнена граничными условиями

для появившейся теперь в уравнениях радиальной компоненты магнитного поля в разряде. В этой связи отмечено, что принципиально новым (по отношению к предыдущей части работы) является в данном случае вопрос о значениях первой и второй радиальных производных фазового угла радиальной компоненты магнитного поля в разряде на оси плазменного сгустка. Этот вопрос **разрешён** в последней части этого параграфа.

В четвёртой главе с помощью полученного выше полного набора предельных соотношений дано исчерпывающее аналитическое решение задачи о структуре квазистационарного электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда конечной длины вблизи оси плазменного сгустка

В параграфе 1 собран вместе и проанализирован полный набор предельных соотношений, полученный для ВЧИ разряда в двухмерной постановке задачи. Показано, что сводящиеся в одномерном случае к радиальным производным амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде предельные соотношения переходят в двухмерной постановке задачи в частные производные (по радиальной координате) азимутальной компоненты ротора вектора амплитудных значений магнитного поля (в так называемую "косую" или "перекрестную" разность первых производных радиальной и продольной компонент магнитного поля), что позволяет записать соответствующие предельные соотношения в более компактном виде. Выяснено, что набор предельных соотношений можно преобразовать также и к виду, не содержащему радиальной компоненты магнитного поля. Показано, что описываемая предельными соотношениями поверхность $H_z(r, z)$ является, вообще говоря, лишь частным случаем весьма общего класса поверхностей специального вида, отвечающего наборам предельных соотношений различных порядков.

Далее, в соответствии с методом, развитым в главе 2, с использованием полного набора двухмерных предельных соотношений, осуществлено

разложение в ряд **Маклорена** вблизи оси плазмоида - но уже не амплитуды продольного магнитного поля в разряде - а разности перекрёстных производных теперь уже обоих его компонент - продольной и радиальной - и, тем самым, получено дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для этих двух компонент электромагнитного поля, которое по своей структуре уже гораздо проще, чем **исходные** дифференциальные уравнения Максвелла для ВЧИ разряда конечной длины. Принимая во внимание также и одно из исходных **максвелловских** уравнений для этих же компонент магнитного поля, (упрощенное для области малых значений радиальных координат, соответствующих приосевой области плазмоида), получена система, состоящую из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для двух подлежащих определению неизвестных величин - амплитудных значений продольного и радиального магнитных полей в приосевой области плазмоида. Путём повышения порядка и с помощью ряда стандартных преобразований из этой системы получены уравнения соответственно для продольной и поперечной компонент магнитного поля, каждое из которых содержит уже только одну неизвестную величину (являясь при этом линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка).

Дальнейшие преобразования полученной системы уравнений начинаются с уравнения для амплитуды продольной компоненты магнитного поля, поскольку уже известна структура его решения в одномерном случае (проанализированная ранее в главе 2). Это уравнение имеет точное **решение**, которое можно получить при помощи метода Фурье (разделения переменных) путём представления искомой функции $H_z(r, z)$ в виде произведения радиальной $H_1(r)$ и аксиальной $H_2(z)$ функций во всей области определения функции $H_z(r, z)$. В этом случае уравнение второго порядка для $H_z(r, z)$ расщепляется на два уравнения, одно из которых является неоднородным уравнением Бесселя для радиальной функции $H_1(r)$, содержащим в правой части степенную

функцию второго порядка, второе же сводится к уравнению гармонических колебаний, решение которого достаточно очевидно.

Решение полученного таким путём неоднородного уравнения Бесселя, удовлетворяющее как принципу соответствия, так и граничным условиям, в данном случае не сводится к уже известным решениям, но его можно искать стандартными методами математической физики, последовательно сводя получающиеся в процессе решения интегралы от цилиндрических функций к табличным. В результате, используя в качестве промежуточной величины функцию **Ломмеля** $s_{\mu,\nu}$, можно получить искомое решение, записанное с помощью обобщённой гипергеометрической функции ${}_1F_2$, которое, в свою очередь, преобразуя входящие в ${}_1F_2(a; b_1, b_2; z)$ символы Похгаммера $(a)_k$ и $(b_{1,2})_k$ удобно привести к более традиционному виду, содержащему лишь модифицированные функции Бесселя и степенную зависимость от радиальной координаты r . Окончательно зависящее от радиальных координат ядро функции $H_1(r)$ сводится в этом случае к разности модифицированной функции Бесселя нулевого порядка и первых двух членов разложения этой функции в ряд Тейлора вблизи оси плазмоида. В результате общее решение для амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде записано в виде, содержащем комбинацию модифицированных функций Бесселя и гармонических функций и удовлетворяющее при этом своего рода принципу соответствия - то есть переходящее в полученное выше решение соответствующих **одномерных** уравнений. Полученные формулы дают возможность в первом приближении проанализировать поведение всех основных характеристик электромагнитного поля ВЧИ разряда вблизи оси плазмоида. Так, в частности, формула для амплитуды радиальной компоненты магнитного поля в разряде находится тогда в результате непосредственного дифференцирования одного из уравнений исходной системы (для **приосевой** области плазмоида). Интересно при этом отметить, что с точки зрения математики итоговое соотношение для амплитуды радиального магнитного

поля имеет *ту же структуру*, что и формула для амплитуды его аксиальной компоненты, поскольку в этом соотношении также присутствует разность модифицированной функции Бесселя (хотя уже не нулевого, а первого порядка) и двух первых членов разложения этой функции в её ряд **Маклорена**.

В заключение этого параграфа приводятся также формулы для фазовых углов всех трёх (двух магнитных и одной электрической) компонент электромагнитного поля. Эти три зависимости - точно так же, как и в одномерном случае - представляют собой обычные параболы второго порядка. А это, в свою очередь, означает, что фазовые углы всех трёх компонент электромагнитного поля вблизи оси **плазмоида** (по крайней мере в первом приближении) вообще не зависят от аксиальной координаты z .

Параграф 2 посвящён выводу формул второго приближения данной задачи (в двухмерной её постановке) - в той последовательности, в которой это приближение было введено в главе 2. Отмечено, что и в двухмерной постановке задачи формулы первого приближения для фазовых углов сохраняют структуру одномерного решения, вследствие чего общую систему формул второго приближения можно записать в наиболее удобном для расчётов виде, и при этом в выражениях для угловых функций явная зависимость от аксиальных координат исчезает во втором приближении, точно так же, как и в первом.

Основным результатом решения задачи во втором приближении при этом являются формулы, устанавливающие связь между вихревым электрическим и радиальным магнитным полями в разряде, в частности, разность фаз этими компонентами электромагнитного поля вблизи оси **плазмоида** является величиной постоянной и при этом равной $\pi/2$. Полученные соотношения, как выяснено ниже, являются ключевыми при построении замкнутой численной модели, описывающей квазистационарное электромагнитное поле высокочастотного индукционного разряда конечной длины.

В пятой главе развита аналитическая теория двухмерной модели Томсона высокочастотного индукционного разряда конечной длины, в рамках которой построены решения в специальных функциях и найдены носящие универсальный характер соотношения между характеристиками радиального магнитного и вихревого электрического полей в разряде (в приближении $\sigma = \text{const}$).

Параграф 1 посвящён подробному анализу классической одномерной модели Томсона, который необходим для методологической последовательности перехода к двухмерной модели, являющейся целью настоящего исследования. Показано, что в комплексной записи уравнения Максвелла сохраняют линейную структуру и допускают точное решение, записанное при помощи функций Кельвина первого рода нулевого и первого порядков. Осуществлён предельный переход в область малых значений радиальных координат и показано, что решения, которые могут быть построены в рамках модели Томсона, с точностью до обозначений совпадают с соответствующими соотношениями главы 2, полученными в рамках первого приближения основной одномерной модели.

В параграфе 2 с использованием основной идеи Дж. Дж. Томсона впервые изучена структура квазистационарного электромагнитного поля ВЧИ разряда в двухмерной постановке задачи. Получены уравнения для комплексных амплитуд всех трёх величин, характеризующих ВЧ поле в разряде, которые допускают точные решения стандартным методом разделения переменных, в результате чего эти решения можно записать в виде функций Бесселя от комплексного аргумента. Принципиальная сложность (с точки зрения математики) при этом состоит в том, что в данном случае (в отличие от одномерного варианта решения) функции Бесселя от комплексного аргумента уже нельзя сразу же разложить на множители с использованием функций Кельвина, поскольку в данном случае параметр расщепления, соответствующий двухмерной постановке задачи, не равен нулю. Это приводит к необходимости

применения к правой части полученных формул теоремы сложения Графа для цилиндрических функций, вследствие чего итоговые решения записываются в виде бесконечных рядов, состоящих из произведений функций Бесселя и Кельвина различных порядков(с точки зрения математики это означает, что только бесконечная система функций Бесселя является полной системой функций). Показано, что при устремлении в них константы расщепления к нулю полученные формулы переходят в классическое решение Томсона одномерной модели. В заключение этого параграфа продемонстрировано, что в пределе малых значений радиальных координат m (для приосевой области плазмоида) полученные решения согласуются с соответствующими формулами первого приближения, полученными в главе 2 с помощью метода предельных соотношений для ВЧ индукционного разряда.

Параграф 3 посвящён основанному на методе Томсона анализу структуры электромагнитного поля ВЧИ разряда конечной длины во всём объёме плазменного сгустка. В нём получены три принципиальных результата, которые в действительности являются центральными результатами томсоновской модели ВЧ индукционного разряда конечной длины:

- Фазовые углы всех трёх компонент электромагнитного поля в разряде не зависят от продольной координаты z ;
- Разность фаз между радиальной составляющей магнитного поля и азимутальным электрическим полем есть величина постоянная и равная $\pi/2$;
- Амплитуды радиального магнитного и азимутального электрического полей в разряде связаны формулами

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = \frac{b^2 c}{\omega} E_\varphi \text{ и } \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{\omega}{c} H_r,$$

в которых $\text{fc} = \arccos[H_z(0,L)/H_z(0,0)]/L$ - параметр расщепления, ω - частота колебаний ВЧ поля, c - скорость света в пустоте (в гауссовой системе единиц).

В заключение указано, что исходя из других соображений (и только для

области малых значений радиальных координат r) эти три утверждения фактически уже были получены ранее в главе 4.

В параграфе 4 метод предельных соотношений применён к уравнениям модели Томсона **ВЧИ** разряда как в одномерном, так и в двухмерном её вариантах. Показано, что в первом приближении метод предельных соотношений в данном случае даёт правильный (в смысле принципа соответствия) результат для пяти из шести характеризующих поле электромагнитных величин, в то время как для амплитуды продольного магнитного поля в разряде (которое в действительности является наиболее интересным объектом исследования) мы получаем отличие от ранее найденных **зависимостей**, заключающееся в завышении в два раза коэффициентов высших степеней в разложении этой величины в её ряд **Маклорена**. Выяснено, что этот эффект в конечном счёте связан с неучетом - в комплексной постановке задачи - в основных исходных разложениях членов, содержащих высшие (в данном случае - от четвёртой и выше) степени малости по r . Продемонстрировано, что в рамках комплексной постановки задачи правильный результат можно получить путём применения формул второго **приближения** к исходным комплексным уравнениям электромагнитного поля.

В шестой главе с помощью результатов, **полученных** на основе построенной в первой, второй и пятой главах работы аналитической модели дано численное решение задачи восстановления структуры квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда (включая и проводимость в разряде) по измеренным значениям H_z в одномерной постановке задачи, а также решён вопрос о структуре электромагнитного поля **ВЧ** индукционного разряда конечной длины в плоскости центрального сечения **плазмоида**, ответ на который необходим при постановке граничных условий для полной (двухмерной) постановки задачи.

Параграф 1__посвящён построению одномерной численной модели, решающей поставленную задачу (то есть восстановление $\sigma(r, z)$ в разряде) и удовлетворительно описывающей структуру **квзистационарного** электромагнитного поля ВЧИ разряда конечной длины в восьми выбранных сечениях **плазмоида** (с точки зрения математики - на множестве меры нуль при $z = z_j, j = 0, 1, \dots, 7$) вниз по потоку. Показано, что система одномерных уравнений электромагнитного поля не допускает численного решения ни одним из известных нам стандартных методов явной схемы - то есть методами Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса и различных их модификаций. Это, в свою очередь, является прямым следствием того обстоятельства, что первые **производные** трёх из четырёх характеризующих поле электромагнитных величин (а значит и правые части соответствующих уравнений) обращаются в нуль на оси плазмоида. Вследствие этого для решения предложена нестандартная схема, **основанная** на аппроксимации с половинным весом уравнений для разности фазовых углов $\Delta\varphi = \varphi_{H_z} - \varphi_{E_z}$, **являющейся**, как можно показать, одним из инвариантов группы преобразований, соответствующей этой системе уравнений.

В соответствии со сказанным выше наиболее принципиальным моментом решения является при этом вопрос о восстановлении амплитуды продольной компоненты магнитного в разряде как функции радиальной координаты r по множеству меры нуль её экспериментально измеренных значений. Основная сложность в данном случае заключена в том, что при аппроксимации значений этой величины, например, сглаженным кубическим сплайном, $\partial H / \partial r \sim r^2$, так что входящее в формулу для ст(г.г) отношение $\frac{\partial H}{\partial r} / E_\varphi / \cos(\Delta\varphi)$ вблизи нуля получает расходимость порядка $1/r$, тогда как в действительности, как было выяснено выше, амплитуда $H_z(r, z)$ должна вести себя вблизи оси плазмоида как парабола четвёртой степени по r , то есть в действительности должно быть $\partial H / \partial r \sim r^3$. В работе указанная расходимость снимается с помощью замены той части

сплайна для $H_z(r, z)$, которая ответственна за расходимость в формуле для $\sigma(r)$ (на практике это примерно одна треть радиуса плазменного сгустка), параболой четвертого порядка, в которой численный коэффициент (коэффициент пропорциональности) найден из условия сшивания этой параболы с кубическим сплайном в некоторой фиксированной точке, положение которой определено непосредственно по результатам численного счёта. Результаты, полученные по предлагаемой методике, сведены в несколько таблиц, которые показывают, что корректировка входной информации в соответствии с аналитической одномерной моделью позволяет - пусть и пока лишь только частично - восстановить структуру квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда конечной длины во всём объёме плазменного сгустка.

В параграфе 2 выведены уравнения для характеристик электромагнитного поля в плоскости центрального сечения плазмоида и произведён расчёт уточнённых значений характеристик электромагнитного поля (включая проводимость в разряде $a = \sigma(r, 0)$) в этой плоскости.

Основной вопрос, который решён в этом параграфе - это вопрос о структуре электромагнитного поля ВЧИ разряда в плоскости центрального сечения плазменного сгустка, ответ на который необходим для задания граничных условий к полной двумерной системе максвелловских уравнений. Ясно, во-первых, что в этой плоскости амплитуда радиального магнитного поля равна нулю, но неизвестно значение осевой производной этой амплитуды (которое, вообще говоря, может быть и отличным от нуля) и, во-вторых, неизвестно также значение фазового угла радиальной компоненты магнитного поля в этой плоскости. Задача данного этапа работы, таким образом, состоит в том, чтобы в качестве следующего шага к решению основной задачи вычислить значения всех (включая $\partial H_z / \partial z$ и ϕ_{H_r}) характеристик электромагнитного поля в плоскости центрального сечения плазмоида, используя в качестве входной

информации числовое поле значений амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде и её производных.

Для решения этой задачи в данном параграфе получена система, состоящая из шести одномерных дифференциальных уравнений для шести подлежащих определению неизвестных величин. Этими величинами (которым можно поставить в соответствие физически ясные граничные условия) являются: три фазовые угла, амплитуда электрического поля и проводимость σ , а также новая введённая нами здесь независимая переменная - аксиальная производная амплитуды поперечного магнитного поля в разряде $\Psi = \partial H_z / \partial z$. Наиболее принципиальным вопросом при этом является вопрос о значении входящих в полученные уравнения вторых производных $\partial^2 H_z / \partial z^2$ и $\partial^2 \varphi_{H_z} / \partial z^2$ в плоскости центрального сечения плазмоида. В работе обосновано предположение о том, что в плоскости центрального сечения значения этих производных приближённо описываются формулами

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \approx b^2 H_z, \quad \frac{\partial^2 \varphi_{H_z}}{\partial z^2} \approx 0,$$

являющимися, как утверждается, вполне естественным приближением в общем контексте задачи. Показано, что в этом случае два из шести уравнений для компонент поля в плоскости $r = 0$ имеют точное решение

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{b^2}{\alpha c} E_\varphi \quad \text{и} \quad \varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi} = \frac{\pi}{2},$$

которое удовлетворяет как поставленным выше граничным условиям, так и своего рода принципу соответствия данной задачи (при $a = \text{const}$ мы в любом случае должны иметь решение Томсона). Полученное решение для $\partial H_z / \partial z$ и φ_{H_z} подставляется затем в оставшихся четыре уравнения (для электрического, продольного магнитного полей и проводимости a в разряде в разряде), в результате чего получена система дифференциальных уравнений, в которой первые два уравнения (для амплитуды и фазы электрического поля в разряде) полностью идентичны соответствующим одномерным, другие же два содержат дополнительные (по отношению к одномерным уравнениям) слагаемые,

приводящие к появлению малых поправок к тому решению задачи, которое было получено выше в рамках одномерной модели, не учитывавшей влияние краевых эффектов на структуру электромагнитного поля в разряде.

Разностная аппроксимация полученных уравнений в принципиальном плане близка развитой в параграфе 1 для чисто одномерной модели схеме. Результаты проведённых на её основе численных расчётов сведены в соответствующую группу таблиц и позволяют сделать вывод о том, что уточнённая по предложенной схеме модель является дальнейшим шагом на пути к получению основного результата работы - численного вычисления $\sigma(r,z)$, избежав при этом погрешности в определении этой основной величины, связывающей собой все главные характеристики ВЧИ разряда. Заметим, что в целом эту постановку задачи (то есть расчёт по уточнённым формулам характеристик электромагнитного поля - но уже не только в центральном его сечении, но и во всём объёме плазменного сгустка) можно также назвать квазиодномерной моделью ВЧ индукционного разряда.

В седьмой, заключительной главе работы на основе полученных главах 4 и 6 аналитических и численных результатов дано исчерпывающее численное решение основной задачи и тем самым достигнута цель всего исследования, то есть решена задача построения замкнутой двухмерной численной модели расчёта электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик плазмы высокочастотного индукционного разряда конечной длины по множеству меры нуль экспериментально измеренных значений амплитуды продольной компоненты магнитного поля в разряде, а также - как численно, так и аналитически - проанализирован ряд установленных автором новых эффектов, связанных с явлением высокочастотного индукционного разряда, стабилизированного закрученным потоком плазмообразующего газа.

Параграф 1 посвящён решению основной поставленной в начале работы задачи - с помощью всех проведённых до этого расчётов в нём построена

замкнутая двумерная численная модель, **решающая** задачу восстановления всех электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик ВЧИ разряда конечной длины по двумерному числовому полю экспериментально измеренных значений амплитуды продольной компоненты **его** магнитного поля во всём объёме плазменного густка.

Для проведения численных **расчётов** система уравнений электромагнитного поля записана в этой части работы в наиболее удобном для построения численной модели виде, в котором скомбинированы уравнения, разрешённые как относительно радиальных, так и относительно продольных производных компонент электромагнитного поля, так что при этом выбранная численная схема решения обеспечивает максимальную гладкость перехода от квазиодномерной к двумерной модели при расчёте первых нескольких шагов в сторону роста аксиальной координаты (своего рода принцип соответствия разностной схемы). При этом, как и в одномерной модели, внутренняя часть аппроксимирующей поверхность $H_z(r, z)$ двумерного сплайна заменяется полученным в главе 4 точным аналитическим решением, описывающим поведение двумерной функции $H_z(r, z)$ вблизи оси **плазмоида**. Численный коэффициент в этом решении, как обычно, определяется из условия непрерывности функции $H_z(r)$, то есть из условия сшивания этого решения со сплайном в некоторой точке. Результаты совместного решения системы двумерных уравнений электромагнитного поля приведены во включённых в работу таблицах, которые убедительно демонстрируют исчерпывающее решение поставленной задачи.

В параграфе 2 проанализирован один из новых результатов, полученных при анализе численного решения полевых уравнений, в ходе которого выяснено, что внутри плазмоида высокочастотного индукционного разряда в каждом поперечном сечении максимум проводимости, как функции радиуса, находится ближе к оси разряда, чем максимум плотности вихревого тока, а последний, в свою очередь, расположен ближе к оси, чем максимум

вкладываемой в разряд мощности на единицу объёма. В работе это неравенство удалось обосновать аналитически, и при этом доказан даже несколько более общий результат, состоящий в том, что внутри ВЧИ разряда существует семейство коаксиальных цилиндрических поверхностей, соответствующих максимумам величин $a E_{\varphi,j}^j, j=0,1,\dots$ и при этом - в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР) — принадлежащая этому семейству поверхность минимального радиуса в силу однозначной в этом случае связи температуры с проводимостью в разряде: $\sigma=\sigma(T)$, - является одновременно также и поверхностью, отвечающей максимальной температуре внутри плазмоида.

Параграф 3 посвящён анализу парадокса фон Энгеля-Штеенбека в высокочастотном индукционном разряде. Суть этого явления, впервые установленного для дугового разряда фон Энгелем и Штеенбеком ещё в 1934 году, заключается в том, что чем больше тепла отбирается из дугового разряда (например, путём его обдува холодным газом), то есть чем больше разряд охлаждается с целью гашения, тем, наоборот, его температура становится выше, а диаметр меньше. В работе на основе разработанного метода анализа тонкой структуры температурного и электромагнитного полей в ВЧИ разряде выяснено, что явление фон Энгеля-Штеенбека в высокочастотном индукционном разряде, хотя и имеет место, носит менее ярко выраженный характер, чем для дуги постоянного тока. Указано, что этот результат подтверждает мнение о том, что газ проникает в разряд не через его боковую поверхность, а через торцы плазменного ступка, вследствие чего большая часть плазмообразующего газа не проникает в разряд, а обтекает его.

В параграфе 4 при помощи метода предельных соотношений получен принципиальный результат, заключающийся в том, что внутри каждого высокочастотного разряда существует по крайней мере одна точка, в которой все три компонента плазмообразующего газа обращаются в нуль и эта точка соответствует той точке на оси плазмоида, в которой значение его осевой

температуры максимально. Для этой цели уравнение, выражающее баланс энергии ВЧИ плазмы вблизи оси **плазмоида**, разрешено относительно продольной составляющей поля скорости вдоль оси разряда, после чего проанализирован вопрос о сходимости к нулю числителя и знаменателя полученной формулы в точке максимума осевой температуры $z_0 = z[T_{max}(0, z)]$. Выяснено, что ни одно из слагаемых числителя этого соотношения не меняет свой знак при переходе через точку z_0 , тогда как знаменатель этой формулы положителен справа и отрицателен слева от **неё**, а это, в свою очередь, означает, что продольная скорость плазмообразующего газа на оси плазмоида $v_z(0, z)$ меняет свой знак в точке z_0 , то есть обращается в нуль в этой точке. Полученный результат назван автором теоремой о неподвижной точке высокочастотного индукционного разряда.

В параграфе 5 с использованием такого же математического аппарата **выяснено**, что установленный выше эффект неподвижной точки высокочастотного индукционного разряда в действительности представляет собой лишь частный случай более общего физического явления - поверхности с нулевой осевой скоростью, в точках которой значения температуры плазмообразующего газа при каждом фиксированном значении радиальной координаты в разряде максимальны и служащей тем самым поверхностью, разделяющей прямое и возвратное течения в газоразрядной камере ВЧИ **плазмотрона**. **Отмечено**, что с точки зрения физики полученный результат можно объяснить тем, что тепло, выделяющееся главным образом в той области разряда, где температура максимальна, отводится конвективными потоками тепла к торцевым частям плазменного сгустка. Указано также, что установленное явление, по-видимому, должно быть свойственно более широкому кругу объектов, имеющих внутренний источник тепла, ограниченный по продольной координате.

В приложении 1 получен несколько более общий (с точки зрения поставленной цели исследования) результат, заключающийся в том, что решением неоднородных уравнений Бесселя с правыми частями, содержащими чётные степени аргумента порядка $2n$ (эти уравнения описывают семейство поверхностей n -го порядка, одной из которых, в частности, является двухмерная поверхность значений амплитуды продольного магнитного поля вблизи оси плазмоида), служат разности функции Бесселя нулевого порядка и сумм первых $n+1$ членов разложений этих функций в их ряды Маклорена. В этом же приложении получено также соотношение, впервые устанавливающее связь обобщённых гипергеометрических рядов специального вида с модифицированными функциями Бесселя.

В приложении 2 приведены результаты группового анализа структуры электромагнитного поля ВЧИ разряда, в рамках которого построены алгебры Ли инфинитезимальных операторов и вычислены группы преобразований, допускаемые уравнениями электромагнитного поля в разряде, а также найдены независимые базисные скалярные инварианты (в совокупности образующие универсальные инварианты) этих групп преобразований.

В заключении перечислены основные результаты работы, выносимые на защиту.

Основные результаты, выносимые на защиту

Основной результат настоящей работы заключается в **решении** обратной задачи электродинамики для высокочастотного индукционного разряда, то есть в разработке замкнутой двухмерной математической модели расчёта электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик плазмы

высокочастотного индукционного разряда конечной длины по измеренным значениям амплитуды продольной составляющей магнитного поля в разряде (или любой другой компоненты электромагнитного поля), в связи с чем впервые:

1) введено фундаментальное понятие предельных соотношений систем дифференциальных уравнений с частными производными, позволяющее однозначно описать структуру решений этих уравнений в окрестностях точек, в которых выражения для вторичных характеристик описываемого уравнениями процесса (то есть тех или иных комбинаций входящих в исходные уравнения неизвестных величин) содержат неопределённости типа $\frac{0}{0}$;

2) на основе анализа системы дифференциальных уравнений Максвелла для квазистационарного цилиндрически симметричного электромагнитного поля выведены формулы предельных соотношений высокочастотного индукционного разряда как в случае одномерного ВЧИ разряда, так и для ВЧИ разряда конечной длины;

3) с помощью полученного выше полного набора предельных соотношений высокочастотного индукционного разряда дано исчерпывающее решение задачи о структуре квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда конечной длины вблизи оси плазменного сгустка. В качестве первого этапа та же задача решена и для одномерного ВЧИ разряда;

4) развита аналитическая теория двухмерной модели Томсона высокочастотного индукционного разряда конечной длины, в рамках которой построены решения в специальных функциях и найдены носящие характер теоремы соотношения между характеристиками радиального магнитного и вихревого электрического полей в разряде;

5) построена одномерная численная модель, в первом приближении решающая обратную задачу электродинамики для высокочастотного индукционного разряда и удовлетворительно описывающая структуру

квазистационарного электромагнитного поля ВЧИ разряда конечной длины для конечного числа поперечных сечений плазмоида (с точки зрения математики - на множестве меры нуль при $z = z_j$; $j = 0, 1, \dots, M$) вниз по потоку;

6) выведено уравнение для характеристик электромагнитного поля в плоскости центрального сечения плазмоида и произведён расчёт уточнённых значений характеристик электромагнитного поля в этой плоскости. То же уравнение использовано для построения квазиодномерной модели плазмоида;

7) на основе полученных в пп.1-6 результатов построена замкнутая численная модель решения обратной задачи электродинамики для двухмерного ВЧИ разряда и произведён расчёт электромагнитных, электрофизических и тепловых характеристик квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда конечной длины во всём объёме плазменного сгустка.

8) обнаружено явление **коаксиальности** высокочастотного индукционного разряда, заключающееся в том, что внутри плазмоида в каждом его поперечном сечении максимум проводимости, как функция радиуса, находится ближе к оси разряда, чем максимум плотности вихревого тока, а максимум плотности вихревого тока, в свою очередь, располагается ближе к оси, чем максимум полной вкладываемой в разряд мощности на единицу объёма. Показано, что это явление является частью более общей зависимости, присущей высокочастотному индукционному разряду;

9) проанализирован парадокс фон Энгеля - **Штеенбека** применительно к высокочастотному индукционному разряду, обдуваемому потоком **плазмобразующего** газа и показано, что в высокочастотном индукционном разряде это явление хотя и имеет место, но в целом носит менее яркий характер, чем для дуги постоянного тока;

10) Выяснено, что внутри каждого высокочастотного индукционного разряда существует, по крайней мере, одна точка, в которой все три компоненты скорости **плазмобразующего** газа обращаются в нуль, и эта точка

соответствует той точке на оси **плазмоида**, в которой значение его осевой температуры максимально. Полученный результат **назван** теоремой о неподвижной точке высокочастотного индукционного разряда.

11) На основе анализа уравнения баланса энергии в высокочастотном индукционном разряде установлено, что области прямого и возвратного течений в нем разделены поверхностью, в точках которой значения температуры **плазмообразующего** газа при каждом фиксированном значении радиальной координаты в разряде максимальны.

Основное содержание результатов работы отражено в следующих публикациях диссертанта:

1. *Гайнуллин Р.Н., Герке А.Р., Кирпичников А.П.* Определение параметров ВЧ индукционной плазмы с учётом конечной длины индуктора // Изв. вузов. Физика. 1992. №6. С.121.

2. *Кирпичников А.П.* Предельные соотношения для ВЧ индукционного разряда // Изв.вузов. Физика. 1993.№ 1. С. 56.

3. *Кирпичников А.П.* О предельных соотношениях системы **уравнений**, описывающих квазистационарное **электромагнитное** поле ВЧ индукционного разряда // Изв. вузов. Физика. 1993.№ 11. С. 102.

4. *Кирпичников А.П.* О структуре квазистационарного электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда при атмосферном **давлении**// Изв. вузов. Физика. 1994. № 2. С. 77.

5. *Кирпичников А.П.* Структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда вблизи плазменного сгустка // ТВТ. 1995. Т. 33, № 1. С.139.

6. *Гайнуллин Р.Н., Герке А.Р., Кирпичников А.П.* Тепловые и электромагнитные параметры высокочастотного разряда при индукционном нагреве газа // ИФЖ. 1995. Т. 6. № 2. С.248.

7. *Гайнуллин Р.Н., Герасимов А.В., Герке А.Р., Кирпичников А.П.* Расчёт полей температуры плазмы ВЧИ разряда в индукторе конечных размеров. В кн.: Тепло- и массообмен в химической технологии / Под ред. А.Г. Усманова. Казань: КИТУ, 1995. С. 103.

8. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П.* Структура высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного сгустка в случае индуктора конечных размеров. В кн.: Плазмотехнология-95 (Сборник научных трудов) / Под ред. С.А. Юхимчука. Запорожье: ЗГТУ, 1995. С.28.

9. *Кирпичников А.П.* О структуре высокочастотного индукционного разряда при атмосферном давлении вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. 1996. Т. 34. №6. С. 989.

10. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П.* Предельные соотношения и аналитические выражения для расчёта основных электрофизических параметров ВЧ плазмы в приосевой области индуктора. В кн.: Современная электротехнология в машиностроении / Под ред. В.В. Любимова. Тула: ТулГУ, 1997. С. 272.

11. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П.* О структуре поля температур высокочастотного индукционного разряда при атмосферном давлении // ТВТ. 1998. Т. 36. №2. С. 342.

12. *Кирпичников А.П.* О модели Томсона ВЧИ разряда конечной длины // Изв. вузов. Физика. 1998. № 2. С.125.

13. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П., Таланов М.О.* Аналитическое исследование скорости на оси ВЧИ разряда. В кн.: Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: МЭИ, 1999. С.283.

14. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П.* Неподвижная точка высокочастотного индукционного разряда // ТВТ. 1999. Т. 37. № 3. С. 504.

15. *Герасимов А.В., Кирпичников А.П.* О структуре высокочастотного индукционного разряда // ТВТ. 1999. Т. 37. № 5. С. 833.

16. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Поле температур высокочастотного индукционного разряда атмосферного давления вблизи оси плазменного сгустка // Промышленная теплотехника. 2000. № 1. С. 24.

17. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Двухтемпературная модель баланса энергии плазмы высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. 2000. Т. 38. № 5. С. 710.

18. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Парадокс Энгеля-Штеенбека в высокочастотном индукционном разряде. В кн.: Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках. Т. 1 / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: МЭИ, 2001. С. 221.

19. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Высокочастотный индукционный разряд в потоке газа // ТВТ. 2001. Т. 39. № 4. С. 671.

20. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Расчёт электрофизических и термогазодинамических параметров плазмы в высокочастотном индукционном плазмотроне. В кн.: Оборудование и технологии термической обработки металлов и сплавов в машиностроении. Т. 1 / Под ред. В.И. Шулаева. Харьков: ННЦ ХФТИ, 2001. С. 57.

21. Гайнуллин Р.Н., Герасимов А.В., Герке А.Р., Кирпичников А.П. Обратная задача электродинамики для высокочастотного индукционного разряда. В кн.: Современные средства диагностики плазмы и их применение для контроля веществ и окружающей среды / Под ред. В.А. Курнаева. М.: МИФИ, 2001. С.78.

22. Герасимов А.В., Зеленко О.Р., Кирпичников А.П. Неравновесный теплообмен в газоразрядной камере ВЧИ плазмотрона // Энерго. 2001. № 2(3). С. 86.

23. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. Поверхность раздела прямого и возвратного течений в высокочастотном индукционном разряде // ДАН. 2003. Т.389. №2. С.177.